Die Struktur der Invarianzgruppe für lineare Feldtheorien

H. Steudel

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin,
Arbeitsgruppe für Grundlagenforschung der Theorie der Teilchen und Felder

(Z. Naturforschg. **21 a**, 1826—1828 [1966]; eingegangen am 16. Juli 1965)

The Lie algebra $\mathfrak{A}$ of the invariance group of any field theory with a homogeneous quadratic Lagrangian shows a remarkable structure: If D_1, D_2, D_3 are any three elements of $\mathfrak{A}$ then the expression $\frac{1}{2}(D_1 D_2 D_3 + D_3 D_2 D_1)$ also belongs to $\mathfrak{A}$.

This general property allows, starting with known invariance transformations or conservation laws, to derive an infinite number of conservation laws.

In letzter Zeit ist eine Anzahl von Arbeiten [1–4] erschienen, die sich mit neuen Erhaltungssätzen in linearen Feldtheorien beschäftigen. Lipkin [1] gibt für die Elektrodynamik einen sogenannten „Zilchtensor" an, für den ein Erhaltungsatz gilt. In der zitierten Arbeit wird auch eine physikalische Deutung der Erhaltungsgröße versucht. Candlin [4] zeigt, daß der Zilchtensor zusammen mit dem Energie-Impuls-Tensor einer unendlichen Folge von erhaltenen Tensoren angehört, die er wegen ihrer Struktur „Wellenvektormomente" nennt. Fairlie [2] konstruiert am Beispiel der Klein–Gordon-Gleichung mit Hilfe einer formal nichtlokalen Lagrange-Dichte eine unendliche Folge von Erhaltungssätzen und deutet eine Verallgemeinerung seiner Methode an. Er vertritt jedoch die Meinung, daß sich die neuen Erhaltungssätze nicht aus Invarianzeigenschaften ableiten lassen.

Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit ist dagegen die Vermutung, daß sich all diese unendlich vielen Erhaltungssätze nach dem ersten Noetherschen Satz [5] ableiten lassen, und daß sich ihre Existenz folglich in einer Struktureigenschaft der Invarianzgruppe oder – genauer gesagt – der Lieschen Algebra ihrer Erzeugenden widerspiegelt.

Es wird ein einfaches Konstruktionsprinzip angegeben, wonach sich aus je drei (nicht notwendig verschiedenen) Invarianztransformationen einer homogenen quadratischen Lagrange-Dichte eine vierte gewinnen läßt.

Nachweis einer Struktureigenschaft der Invarianzgruppe

Die Lagrange-Dichte $L(x^\mu, \varphi_a, \varphi_{a,\mu})$ sei eine in den Feldvariablen φ_a und deren Ableitungen $\varphi_{a,\mu} \equiv \partial\varphi_a/\partial x^\mu$ homogene quadratische Funktion $(a=1,\dots,N;\ \mu=1,\dots,n)$. Die „Lagrangeschen Ausdrücke"

$$\Lambda_a[\varphi] \equiv \frac{\partial L}{\partial\varphi_a} - \left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{a,\mu}}\right)_{,\mu} \tag{1}$$

sind dann homogen linear in φ_a, $\varphi_{a,\mu}$, $\varphi_{a,\mu\nu}$.

Nach dem Eulerschen Satz für homogene Funktionen gilt die Identität

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi_a}\varphi_a + \frac{\partial L}{\partial\varphi_{a,\mu}}\varphi_{a,\mu} = 2L, \tag{2}$$

die nach Abspaltung einer Divergenz und mit der zur Abkürzung eingeführten Größe

$$\pi_a{}^\mu \equiv \partial L/\partial\varphi_{a,\mu} \tag{3}$$

auf die Form

$$\Lambda_a[\varphi]\,\varphi_a + (\pi_a{}^\mu\,\varphi_a)_{,\mu} = 2L \tag{4}$$

gebracht werden kann. Die $\pi_a{}^\mu$ sind linear in φ_a, $\varphi_{a,\mu}$. Durch

$$\varphi_a \to \varphi_a + \delta\varphi_a, \tag{5}$$

$$\delta\varphi_a = \varepsilon\,(D\varphi)_a \tag{6}$$

sei eine infinitesimale Transformation der Feldgrößen $\varphi_a(x)$ gegeben. Der erzeugende Operator D der Transformation soll die folgende Struktur haben:

$$(D\varphi)_a \equiv \alpha_a(x) + \beta_{ab}(x)\,\varphi_b + \gamma^\mu_{ab}(x)\,\varphi_{b,\mu} + \dots, \tag{7}$$

wobei die rechte Seite inhomogen linear in den φ_a und deren Ableitungen beliebig hoher Ordnung ist.

Für die resultierende Variation von L erhält man

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\partial L}{\partial\varphi_{a,\mu}}\delta\varphi_{a,\mu} \\ &= \Lambda_a[\varphi]\,\delta\varphi_a + (\pi_a{}^\mu\,\delta\varphi_a)_{,\mu},\end{aligned} \tag{8}$$

[1] D. M. Lipkin, J. Math. Phys. **5**, 696 [1964].
[2] D. B. Fairlie, Nuovo Cim. **37**, 897 [1965].
[3] T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. **6**, 1022 [1965].
[4] D. J. Candlin, Nuovo Cim. **37**, 1390 [1965].
[5] E. Noether, Götinger Nachr. [1918], p. 235.

und mit Hilfe von Gl. (4) folgt die Identität

$$\Lambda_a[\delta\varphi]\,\varphi_a - \Lambda_a[\varphi]\,\delta\varphi_a = (\pi_a{}^\mu\,\delta\varphi_a - \delta\pi_a{}^\mu\cdot\varphi_a)_{,\mu}\,. \tag{9}$$

Bisher wurde von der durch Gl. (5) gegebenen Transformation noch keine Invarianzeigenschaft gefordert. Erst jetzt setzen wir voraus, daß sie die LAGRANGE-Dichte invariant läßt bis auf eine Divergenz, d. h.

$$\delta L = \varepsilon\, A^\mu{}_{,\mu}\,. \tag{10}$$

Wir vereinbaren, daß „Invarianz" in diesem Zusammenhang immer „Invarianz der LAGRANGE-Dichte bis auf eine Divergenz" bedeuten soll. Die Gruppe der so definierten Invarianztransformationen nennen wir $\mathfrak{G}$, ihre LIESche Algebra $\mathfrak{A}$. Wir fordern also: $D\in\mathfrak{A}$.

Auf eine Mittransformation der unabhängigen Veränderlichen x^μ haben wir verzichtet. Im Anhang soll gezeigt werden, daß damit kein Verlust an Allgemeinheit verbunden ist.

Aus den Gln. (6), (8) und (10) bekommt man nach Einführung des Stromvektors

$$j^\nu \equiv A^\nu - \pi_a{}^\nu (D\varphi)_a \tag{11}$$

die Identität

$$\boxed{j^\nu{}_{,\nu} = \Lambda_a[\varphi]\,(D\varphi)_a} \tag{12}$$

und folglich den Erhaltungssatz $j^\nu{}_{,\nu}=0$ für alle Lösungen der Feldgleichungen $\Lambda_a=0$ (Erster NOETHERscher Satz).

Mit Hilfe von Gl. (9) folgt für den Stromvektor

$$s^\nu \equiv A^\nu - \pi_a{}^\nu [D\varphi]\,\varphi_a \tag{13}$$

die Identität

$$\boxed{s^\nu{}_{,\nu} = \Lambda_a[D\varphi]\,\varphi_a}\,, \tag{14}$$

die sich bald als nützlich erweisen wird.

Die Gln. (12) und (14) sind Identitäten zwischen quadratischen Formen der φ_a, $\varphi_{a,\mu}$, ... Diese Identitäten bleiben bestehen, wenn man auf beiden Seiten zu den eindeutig bestimmten symmetrischen Bilinearformen übergeht. Die zu den quadratischen Formen $j^\nu[\varphi]$ und $s^\nu[\varphi]$ gehörenden Bilinearformen bezeichnen wir mit $j^\nu[\psi,\chi]$ und $s^\nu[\psi,\chi]$ mit beliebig wählbaren Argumenten ψ, χ.

Nun seien D_1, D_2, D_3 drei Elemente von $\mathfrak{A}$. Dann haben wir je drei Gleichungen der Form (12) und (14), wobei wir die entsprechenden Größen j^ν, s^ν, A^ν genau wie D mit den Indizes 1, 2 oder 3 versehen. Nach dem oben formulierten Prinzip können wir zu den symmetrischen Bilinearformen übergehen und insbesondere die folgenden drei Identitäten hinschreiben:

$$\partial_\nu j^\nu_{(1)}[\varphi, D_2 D_3\varphi] \tag{15}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\Lambda_a[\varphi]\,(D_1 D_2 D_3\varphi)_a + \Lambda_a[D_2 D_3\varphi]\,(D_1\varphi)_a\}\,,$$

$$\partial_\nu j^\nu_{(3)}[\varphi, D_2 D_1\varphi] \tag{16}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\Lambda_a[\varphi]\,(D_3 D_2 D_1\varphi)_a + \Lambda_a[D_2 D_1\varphi]\,(D_3\varphi)_a\}\,,$$

$$\partial_\nu s^\nu_{(2)}[D_1\varphi, D_3\varphi] \tag{17}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\Lambda_a[D_2 D_1\varphi]\,(D_3\varphi)_a + \Lambda_a[D_2 D_3\varphi]\,(D_1\varphi)_a\}\,.$$

∂_ν bezeichnet die Differentiation nach x^ν, natürlich unter Berücksichtigung der impliziten Abhängigkeit.

Addition der ersten beiden Gleichungen und Subtraktion der dritten liefert mit den Abkürzungen

$$J^\nu_{(123)} \equiv j^\nu_{(1)}[\varphi, D_2 D_3\varphi] + j^\nu_{(3)}[\varphi, D_2 D_1\varphi] - s^\nu_{(2)}[D_1\varphi, D_3\varphi]\,, \tag{18}$$

$$D_{(123)} \equiv \tfrac{1}{2}\,(D_1 D_2 D_3 + D_3 D_2 D_1) \tag{19}$$

die Identität

$$\boxed{J^\nu_{(123),\nu} = \Lambda_a[\varphi]\,(D_{(123)}\varphi)_a}\,. \tag{20}$$

Nach der Umkehrung des ersten NOETHERschen Satzes folgt daraus, daß die infinitesimale Transformation

$$\delta_{(123)}\varphi_a = \varepsilon\,(D_{(123)}\varphi)_a \tag{21}$$

eine Invarianztransformation ist, d. h. daß $D_{(123)}$ zu $\mathfrak{A}$ gehört.

Man könnte nun alles vergessen bis auf das durch Gl. (19) gegebene Konstruktionsprinzip und nach dem ersten NOETHERschen Satz den zugehörigen Erhaltungssatz ableiten. Tatsächlich aber dürfte es im allgemeinen bequemer sein, die Gl. (18) zur Bestimmung des entsprechenden Stromvektors heranzuziehen.

Zusammenfassend können wir den Satz aussprechen:

Satz: Sind D_1, D_2 und D_3 drei Elemente der LIEschen Algebra $\mathfrak{A}$ der Invarianzgruppe einer homogenen quadratischen LAGRANGE-Dichte, so gehört auch

$$D_{(123)} \equiv \tfrac{1}{2}(D_1 D_2 D_3 + D_3 D_2 D_1) \quad \text{zu } \mathfrak{A}.$$

Der zugehörige Stromvektor $J^\nu_{(123)}$, für den ein Erhaltungssatz gilt, läßt sich mit Hilfe der durch die Gln. (12) und (14) definierten Stromvektoren $j^\nu_{(1)}$, $j^\nu_{(3)}$, $s^\nu_{(2)}$ nach Bildung der entsprechenden symmetrischen Bilinearformen gemäß Gl. (18) konstruieren.

Folgerungen

Wir erwähnten bereits, daß D_1, D_2 und D_3 nicht alle voneinander verschieden zu sein brauchen. So erhält man zu einem einzigen Element $D \in \mathfrak{A}$ bereits die unendliche Folge

$$D,\ D^3,\ D^5, \ldots \in \mathfrak{A}\,.$$

Für zwei Elemente D_1, $D_2 \in \mathfrak{A}$ haben wir

$$\tfrac{1}{2}\,(D_1^2\,D_2 + D_2\,D_1^2) \in \mathfrak{A}$$

$$D_1\,D_2\,D_1 \in \mathfrak{A} \quad \text{etc.}$$

Ist L translationsinvariant, so folgt Invarianz gegenüber der durch die Operatoren

$$\partial_\alpha, \quad \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\partial_{\alpha_3}, \ldots, \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\ \partial_{\alpha_{2k+1}}, \ldots$$

aufgespannten unendlichdimensionalen abelschen Gruppe.

Anhang

Gewöhnlich benutzt man in der Voraussetzung des ersten NOETHERschen Satzes eine Transformation der Art

$$x^{\mu'} = x^\mu + \bar{\delta}\,x^\mu\,,$$
$$\varphi_a{}'(x') = \varphi_a(x) + \bar{\delta}\,\varphi_a(x)\,, \qquad \text{(A 1)}$$

die das Wirkungsintegral

$$W = \int_G L(x, \varphi, \varphi_{,\mu})\,\mathrm{d}^n x\,, \qquad \text{(A 2)}$$

erstreckt über ein beliebiges Gebiet G des n-dimensionalen Raumes, invariant läßt bis auf das Integral über eine Divergenz $B^\mu{}_{,\mu}$.

Wir überzeugen uns, daß man zu einer Transformation der Feldgrößen *allein* übergehen kann, die L invariant läßt bis auf eine Divergenz und zu demselben Erhaltungssatz führt. Man kann daher grundsätzlich auf die Mittransformation der x^μ verzichten. Allerdings bietet in wichtigen Anwendungen (z. B. LORENTZ-Invarianz) gerade die Transformation der unabhängigen Veränderlichen den natürlichen Ausgangspunkt. Wir können jedoch diese Transformationen als bloß heuristischen Zugang zu den entsprechenden reinen Feldtransformationen ansehen.

Die Transformation (A 1) ergibt für die Variation des Wirkungsintegrals

$$\bar{\delta} W = \int_{G'} L(x', \varphi'(x'), \varphi'_{,\mu'}(x'))\,\mathrm{d}^n x'$$
$$- \int L(x, \varphi(x), \varphi_{,\mu}(x))\,\mathrm{d}^n x\,. \qquad \text{(A 3)}$$

Führen wir im ersten Integral x^μ statt $x^{\mu'}$ als neue Integrationsvariable ein und berücksichtigen die Funktionaldeterminante

$$\partial(x')/\partial(x) = 1 + (\bar{\delta} x^\mu)_{,\mu}\,, \qquad \text{(A 4)}$$

so wird dieses Integral

$$\int_G L(x, \varphi'(x + \bar{\delta} x), \varphi'_{,\mu}(x + \bar{\delta} x))\,(1 + (\bar{\delta} x^\mu)_{,\mu})\,\mathrm{d}^n x$$
$$= \int_G [L(x, \varphi'(x), \varphi'_{,\mu}(x)) + L_{,\mu}\bar{\delta} x^\mu + L(\bar{\delta} x^\mu)_{,\mu}]\,\mathrm{d}^n x\,,$$

und wir haben

$$\bar{\delta} W = \int [\delta L + (L\,\bar{\delta} x^\mu)_{,\mu}]\,\mathrm{d}^n x \qquad \text{(A 5)}$$

mit

$$\delta L \equiv L(x, \varphi'(x), \varphi'_{,\mu}(x)) - L(x, \varphi(x), \varphi_{,\mu}(x))\,,$$
$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \varphi_a}\,\delta\varphi_a + \frac{\partial L}{\partial \varphi_{a,\mu}}\,\delta\varphi_{a,\mu}\,, \qquad \text{(A 6)}$$

$$\delta\varphi_a \equiv \bar{\delta}\varphi_a - \varphi_{a,\mu}\,\bar{\delta} x^\mu\,. \qquad \text{(A 7)}$$

Nach Voraussetzung ist der Integrand in Gl. (A 5) gleich $B^\mu{}_{,\mu}$. Also ist

$$\delta L = (B^\mu - L\,\bar{\delta} x^\mu)_{,\mu}\,, \qquad \text{(A 8)}$$

d. h. L ist gegenüber der Transformation

$$x^\mu \to x^\mu, \quad \varphi_a \to \varphi_a + \delta\varphi_a \qquad \text{(A 9)}$$

invariant bis auf die Divergenz $(B^\mu - L\,\bar{\delta} x^\mu)_{,\mu}$.

Unabhängig davon, ob wir nun den ersten NOETHERschen Satz auf die Transformation (A 1) oder auf die Transformation (A 9) anwenden, bekommen wir einen Erhaltungssatz für den Stromvektor

$$j^\mu \equiv B^\mu - L\,\bar{\delta} x^\mu - \pi_a{}^\mu\,\delta\varphi_a\,.$$

Zusatz bei der Korrektur:

Einen analogen Satz mit der spezielleren Annahme konstanter Koeffizienten α, β, γ ... in Gl. (7) hat Verf. bereits in Nuovo Cim. **39**, 395 [1965] veröffentlicht.

Inzwischen ist eine Arbeit von MORGAN und JOSEPH (Nuovo Cim. **39**, 494 [1965]) erschienen, in der die neuen Erhaltungssätze ebenfalls nach dem NOETHERschen Satz abgeleitet werden. Allerdings benutzen diese Autoren dazu nicht die ursprüngliche LAGRANGE-Dichte des betrachteten Problems, sondern konstruieren sogen. Tensor-LAGRANGE-Dichten.